Sp(p, q)の不連続部分群のcohomologyについて(対称空間上の固有函数とリー群の表現)

今野, 泰子

数理解析研究所講究録
642巻 1988年 1-13

Sp(p,q)の不連続部分群のcohomologyについて.

大阪府立大学 今野泰子 (Yasuko Konno)

§1. cohomologyの消滅定理

Gを. 連結な半単純リー群で. centerが有限. compact factorをもたないものとし. Γをその不連続部分群で. $\Gamma\backslash G$がcompactなものとする。有限次元既約G-module (ρ, F)が与えられたとき. ΓのFに係数をもつcohomology $H^*(\Gamma, F)$を問題にする。

よく知られているように. $H^*(\Gamma, F)$はGのリー環$\mathfrak{g}$のrelative Lie algebra cohomologyを用いて表わされる。Kを. Gの極大compact部分群とする. Gのunitary dualを$\hat{G}$とし. $\hat{G}$の各元(π, H_π)に対して. 右正則表現$(\pi_\Gamma, L^2(\Gamma\backslash G))$における$\pi$の重複度を$m(\pi, \Gamma)$とあらわす。このとき. 一般化された松嶋-村上の式より

$$H^*(\Gamma, F) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} m(\pi, \Gamma)\, H^*(\mathfrak{g}, K; H_\pi^0 \otimes F) \tag{1.1}$$

である([1], VII). ここで. H_π^0はH_πのK-finite vectorの作る既約$(\mathfrak{g}, K)$-module ((π, H_π)のHarish-Chandra module)をあらわし. 右辺の和は. 実際は有限和である。

この式によって $H^*(\Gamma,F)$ を調べようとすれば、次の二つが問題となる。

(I). あるFに対して、$H^*(\mathfrak{g},K;H_\pi^\infty\otimes F)\neq\{0\}$ となるような $\pi\in\hat{G}$ を特徴づけ、そのような π に対して $(\mathfrak{g},K)$-*cohomology* を決定すること。

(II). (I)の π に対して、$m(\pi,\Gamma)$ を決定すること。

(I)は、Γ に無関係な G のみに関する問題で、*Parthasarathy*, *Enright*, *Kumaresan*, *Borel-Wallach* などの研究をもとに *Vogan-Zuckerman* によって、ほぼ完全に解かれている。(II)については、*discrete series* に対して以外、一般に、具体的にはほとんどわかっていない。その点からも、(II)の問題についての情報を与える $H^*(\Gamma,F)$ を知ることは、興味がある。

さて、(I)の問題に関する結果から、次の消滅定理が得られている。以下、G は単純であると仮定する。θ を $\mathfrak{g}$ の *Cartan involution* とし、対応する *Cartan* 分解を $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ とする。$\mathfrak{g}_c$ の *parabolic subalgebra* $\mathfrak{q}$ に対し、その *nilradical* を $\mathfrak{u}_q$ と書く。$\mathfrak{g}_c$ のすべての θ-*stable* ([2], p.57の意味で) な *parabolic subalgebra* $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{g}_c$ について、$\dim(\mathfrak{u}_q\cap\mathfrak{p}_c)$ の最小値を r_G とする。このとき、

<u>定理</u> (Vogan-Zuckerman, [2]) $(\pi,H_\pi)\in\hat{G}$ が *trivial*

表現でないとき．任意の (ρ, F) に対して，

$$H^i(\mathfrak{g}, K; H_\pi^0 \otimes F) = \{0\} \qquad (i < r_G).$$

従って，(1.1) より，任意の Γ に対して，

$$H^i(\Gamma, F) = H^i(\mathfrak{g}, K; F) \qquad (i < r_G).$$

特に，(ρ, F) が *trivial* 表現でないとき，

$$H^i(\Gamma, F) = \{0\} \qquad (i < r_G).$$

ところで，r_G は，一般に，$r_G \geqq \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G$ をみたし，個々の G について計算されている。実際，$r_G > \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G$ となる G もあり，従って，この定理は，それ以前に知られていた $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G$ 未満の次数の消滅定理の精密化となっている。

§2. $Sp(p, q)$ に対する非消滅の結果

上記の消滅定理は，最良のものだろうか。Kazhdan と Shimura は，独立に，$G = SU(p, 1)$ ($r_G = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G = 1$) に対して，$H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \neq \{0\}$ となる Γ の存在を示した。その方法を一般化して，Borel－Wallach は，$G = SU(p, q)$ ($p \geqq q \geqq 1$，$r_G = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G = q$) の場合に，$H^q(\Gamma, F) \neq \{0\}$ となる F (*trivial* 表現でないものも) と Γ の存在を示している。

ここでは，$G = Sp(p, q)$ ($p \geqq q \geqq 1$) の場合をとりあげる。この場合，$r_G = 2q > \mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G = q$ であり，それ故，消

滅定理が最良かどうか、興味深い。

得られた結果をのべよう。以下、$G = Sp(p,q)$ とし、$p+q = n$ とおく。G は次のように、$GL(2n,\mathbb{C})$ の中に実現される。

$$G = \left\{ g \in Sp(n,\mathbb{C}) \;\middle|\; {}^t g \cdot K_{p,q} \cdot \bar{g} = K_{p,q} \right\} \qquad (2.1)$$

但し、$K_{p,q} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} 1_p & 0 \\ \hline 0 & -1_q \end{array} & 0 \\ 0 & \begin{array}{c|c} 1_p & 0 \\ \hline 0 & -1_q \end{array} \end{pmatrix}$

又、$K = G \cap U(2n)$ ととる。$l \in \mathbb{Z}$, $l \geqq 0$ に対して、G の $\mathbb{C}^{2n}$ 上の standard 表現の l 次対称積表現を (ρ_l, F_l)、その反傾表現を、(ρ_l^*, F_l^*) とする。このとき、次の二つの定理を得た。

<u>定理 1</u>　$l \in \mathbb{Z}$, $l \geqq 0$ に対して、$H^{2q}(\mathfrak{g}, K : H_\pi^0 \otimes F_l^*) \neq \{0\}$ となる trivial でない $(\pi, H_\pi) \in \hat{G}$ が存在する。

<u>定理 2</u>　$l \in \mathbb{Z}$, $l \geqq 0$ に対して、$H^{2q}(\Gamma, F_l^*) \neq \{0\}$ となる Γ が存在する。

定理 1, 2 において、π, Γ は勿論 l に依存する。$l = 0$ の場合、すなわち、(ρ_l^*, F_l^*) が trivial 表現の場合、$Sp(p,1)$ に対しては、定理 1 は、Collingwood と Silva の結果の中に含まれている。又、$Sp(p,q)$ $(q \geqq 1)$ に対して、同様に $l = 0$ の場合に

Millson - Raghunathan は、$4q$ 次 cohomology について定理 1，2 と同様の π，Γ の存在を示している。

以下の節で、定理 1，2 の証明の概略をのべよう。方法は Borel - Wallach が、$SU(p, q)$ に対して用いたと同じ方法で、又、その結果も大いに使う。

§3、定理 1 の表現の構成.

どのような表現をみつければよいかについて、次の命題が指針を与える。一般に、§1 の記号の下で、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の Casimir 要素を Ω とすれば、$\pi(\Omega)$，$\rho(\Omega)$ はそれぞれ scalar 作用素となる。$\pi(\Omega) = C_\pi \cdot id.$，$\rho(\Omega) = C_\rho \cdot id.$ （$C_\pi, C_\rho \in \mathbb{C}$）とすれば、

命題（[1], II）　すべての $i \in \mathbb{Z}$，$i \geqq 0$ に対して、

(1). $C_\pi \neq C_\rho$ ならば、$H^i(\mathfrak{g}, K ; H_\pi^0 \otimes F) = \{0\}$.

(2). $C_\pi = C_\rho$ ならば、$H^i(\mathfrak{g}, K ; H_\pi^0 \otimes F) = \mathrm{Hom}_K(\overset{i}{\wedge}\mathfrak{p}, H_\pi^0 \otimes F)$.

従って、定理 1 を示すには、与えられた $l \in \mathbb{Z}$，$l \geqq 0$ に対し

$$C_\pi = C_{\rho_l^*} = \frac{1}{4(n+1)} l(l+2n) \qquad (3.1)$$

$$\mathrm{Hom}_K(\overset{2q}{\wedge}\mathfrak{p}, H_\pi^0 \otimes F_l^*) \neq \{0\} \qquad (3.2)$$

をみたす $\pi \in \hat{G}$ をみつければよい。

既約ユニタリー表現を具体的に与える一つの方法として、

Gを $Sp(m,\mathbb{R})$へ埋めこむことによって，Weil表現の制限から得る方法がある。Gは，次のようにして $Sp(2n,\mathbb{R})$に埋めこまれる。まず(2.1)より，Gは，$K_{p,q}$ によって与えられる$\mathbb{C}^{2n}$上の signature $(2p,2q)$の hermitian form h_0 を不変にし，従って自然に，埋めこみ $\varphi\,;\, G \longrightarrow SU(2p,2q)$ がある。更に h_0を $\mathbb{R}^{4n}$ 上の bilinear form とみるとき，$SU(2p,2q)$は，$GL(4n,\mathbb{R})$の部分群として，h_0の虚数部分である alternating bilinear form を不変にする。すなわち，埋めこみ $\varphi'\,;\, SU(2p,2q) \longrightarrow Sp(2n,\mathbb{R})$ がある。このようにして，埋めこみ $\varphi'\circ\varphi\,;\, G \longrightarrow Sp(2n,\mathbb{R})$ が得られる。以後，$SU(2p,2q)$ を G'と書き，$K' = G' \cap U(2n)$ とする。明らかに，$\varphi(K) \subset K'$ である。

$Sp(2n,\mathbb{R})$の二重の covering group (metaplectic group) を $Mp(2n,\mathbb{R})$とし，$Mp(2n,\mathbb{R})$の Weil 表現を $(W,\, L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ とする。[1], VIII, §2 より，φ' は $Mp(2n,\mathbb{R})$ への準同型 $\Phi'\,;\, G' \longrightarrow Mp(2n,\mathbb{R})$ にもちあげられる。そこで，$U = W\circ\Phi'\circ\varphi$ ，$V = W\circ\Phi'$ と定義すれば，それぞれ G，G'のユニタリー表現 $(U,\, L^2(\mathbb{R}^{2n}))$，$(V,\, L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ が得られる。この表現を既約分解しよう。今

$$M = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & -1_{2p} & 0 \\ & & 0 & 1_{2q} \\ \hline 1_{2p} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & -1_{2q} & & \end{array}\right) \in sp(2n,\mathbb{R})$$

をとり，exponential mapping $\mathrm{Exp}\,;\, sp(2n,\mathbb{R}) \longrightarrow Mp(2n,\mathbb{R})$

によって、*one-parameter subgroup* $\{\mathrm{Exp}\,tM \mid t\in\mathbb{R}\}$を考えれば、$W(\mathrm{Exp}\,tX)$ $(t\in\mathbb{R})$は、$U(G)$, $V(G')$のすべての元と可換である。そこで、$\{W(\mathrm{Exp}\,tX) \mid t\in\mathbb{R}\}$に関する分解を考えればよい。

$r\in\mathbb{Z}$に対して、$L^2(\mathbb{R}^{2n})$の閉部分空間H_rを

$$H_r = \left\{ \varphi\in L^2(\mathbb{R}^{2n}) \;\middle|\; W(\mathrm{Exp}\,tM)\varphi = e^{\sqrt{-1}(p-q+r)t}\varphi \right\}$$

と定義すれば、$L^2(\mathbb{R}^{2n}) = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} H_r$ (*unitary direct sum*) となっている。H_rは$U(G)$-不変、$V(G')$-不変だから

$$U_r(g) = U(g)|_{H_r} \quad (g\in G) \qquad , \qquad V_r(g') = V(g')|_{H_r} \quad (g'\in G')$$

と定義すれば、G, G'の*unitary*表現(U_r, H_r), (V_r, H_r)が得られる。

ところで、G'の表現(V_r, H_r)については、*Borel-Wallach*が、既約となることを示しており、その*Harish-Chandra module* H_r^0についても詳しく調べている。勿論、Gの表現(U_r, H_r)に関して、H_r^0は$(\mathfrak{g}, K)$-*module*ともなるが、その$(\mathfrak{g}, K)$-*module*としての構造を具体的に調べることができる。今、通常のように、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$の*Cartan subalgebra* $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$として、対角行列からなるものをとり、$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$を$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$の通常の基底とすれば、$K$の*dual* $\hat{K}$は、

$$\left\{ \lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i \;\middle|\; a_i\in\mathbb{Z},\; \begin{array}{l} a_1 \geqq \cdots \geqq a_p \geqq 0 \\ a_{p+1} \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0 \end{array} \right\}$$

と1対1に対応している。*highest weight* λの既約K-*module*

を $(\tau_\lambda, E_\lambda)$ と書くとき，H_r^0 の K-type は次のようになる。

<u>命題 1</u>　各 $r \in \mathbb{Z}$ に対し，K-module として，

$$H_r^0 = \bigoplus_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ s \geqq 0, -r}} E_{(r+s)\lambda_1 + s\lambda_{pH}} .$$

更に，H_r^0 上の $\mathfrak{g}_c$ の作用を，$\mathfrak{g}_c$ の基底の一つ一つの元について具体的に調べることによって，次の二つの命題が得られる。

<u>命題 2</u>　各 $r \in \mathbb{Z}$ について，G の表現 (U_r, H_r) は既約であり，その Harish-Chandra module は，G' の表現 (V_r, H_r) の Harish-Chandra module H_r^0 と一致する。

<u>命題 3</u>　各 $r \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$U_r(\Omega) = \frac{1}{4(n+1)} (r+2p)(r-2q) \cdot id.$$

さて，これらの命題から，定理 1 の表現を，上で得られた一連の表現 $\{(U_r, H_r) \mid r \in \mathbb{Z}\}$ の中からみつけることができる。与えられた $\ell \in \mathbb{Z}$ $(\ell \geqq 0)$ に対して，$r = \ell + 2q$ に対応する表現 $(U_{\ell+2q}, H_{\ell+2q})$ をとれば，これが，(3.1), (3.2) をみたすことは，容易に示される。

§4. (U_r, H_r) の $L^2(\Gamma\backslash G)$ への埋めこみ.

定理2の証明についてのべよう。定理2は、次の命題を示すことにより、定理1と(1.1)から得られる。

<u>命題4</u> 各 $r \in \mathbb{Z}$ に対して、$m(U_r, \Gamma) \neq 0$ となるような G の cocompact 不連続部分群 Γ が存在する。

そこで、以下、命題4の証明についてのべる。実は、Borel-Wallach が、G' とその表現 (V_r, H_r) に関して同様の結果、$m(V_r, \Gamma') \neq 0$ となる G' の cocompact な不連続部分群 Γ' の存在を示している。我々の群 G の表現 (U_r, H_r) は、埋めこみ $\varphi ; G \to G'$ を通じて、(V_r, H_r) から得られており、V_r に対する Γ' の存在から、U_r に対する Γ の存在を導びくことが期待される。実際、(U_r, H_r) と (V_r, H_r) の Harish-Chandra module が一致することを使って、次の補題が示される。

<u>補題</u> Γ, Γ' は、それぞれ、G, G' の cocompact 不連続部分群で、$\varphi(\Gamma) \subset \Gamma'$ であるとする。このとき、$\mathrm{Hom}_{G'}(H_r, L^2(\Gamma'\backslash G')) \neq \{0\}$ ならば、$\mathrm{Hom}_G(H_r, L^2(\Gamma\backslash G)) \neq \{0\}$.

従って、Borel-Wallach の構成した Γ' に対し、$\varphi(\Gamma) \subset \Gamma'$ と

なる Γ を与えればよい。これらの部分群は arithmetic に構成される。今 m を奇素数とし $k=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $k'=k(\sqrt{-1})$ とする。$k/\mathbb{Q}$ の galoi 群を $\{1,\sigma\}$ とする。$(k')^{2n}$ 上の alternating bilinear form b, hermitian form h を次の行列で与えられるものとする。

$$b\ ;\ \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1_p & 0 \\ & & 0 & \sqrt{m}1_q \\ \hline -1_p & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & \sqrt{m}1_q & & \end{array}\right) \quad , \quad h\ ;\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1_p & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & \sqrt{m}1_q & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 1_p & 0 \\ & & 0 & \sqrt{m}1_q \end{array}\right)$$

ここで h は signature $(2p,2q)$, h の σ による共役 ${}^{\sigma}h$ は正定値となっている。h, b に対して $GL(4n,\mathbb{C})$ 内の k 上定義された代数群 $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}'$ で

$$\mathbb{G}(k)=\left\{ g\in SL(2n,k') \;\middle|\; \begin{array}{l} h(g\cdot z,\,g\cdot w)=h(z,w) \\ b(g\cdot z,\,g\cdot w)=b(z,w) \end{array} \quad z,w\in(k')^{2n}\right\}$$

$$\mathbb{G}'(k)=\left\{ g\in SL(2n,k') \;\middle|\; h(g\cdot z,\,g\cdot w)=h(z,w) \quad z,w\in(k')^{2n}\right\}$$

となるものが構成される。このとき自然に k 上定義された埋めこみ $\varphi\,;\,\mathbb{G}\longrightarrow\mathbb{G}'$ があり、$\mathbb{G}(\mathbb{R})=Sp(p,q)=G$, $\mathbb{G}'(\mathbb{R})=SU(2p,2q)=G'$ となっている。更に $(k')^{2n}=(k)^{4n}$ とみて h の虚数部分である $(k)^{4n}$ 上の alternating bilinear form β によって k 上定義される代数群 Sp_{2n} を考えれば、自然に k 上定義された埋めこみ $\varphi'\,;\,\mathbb{G}'\longrightarrow Sp_{2n}$ がある。

このようにして，k上定義された代数群と埋めこみの列

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{G} & \xrightarrow{\ \phi\ } & \mathbb{G}' & \xrightarrow{\ \phi'\ } & Sp_{2n} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
G & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & Sp(2n,\mathbb{R})
\end{array}$$

がえられる。この G，G' の $Sp(2n,\mathbb{R})$ への埋めこみは，$\mathbb{R}$上の conjugation を除いて，§3のものと一致している。

ここで，体kを$\mathbb{Q}$に restrict する functor $Res_{k/\mathbb{Q}}$ を用いてすべてを$\mathbb{Q}$上定義された代数群と埋めこみという設定に移そう。$\mathfrak{G} = Res_{k/\mathbb{Q}}\mathbb{G}$，$\mathfrak{G}' = Res_{k/\mathbb{Q}}\mathbb{G}'$，$\Phi = Res_{k/\mathbb{Q}}\phi$，$\Phi' = Res_{k/\mathbb{Q}}\phi'$ とすれば，$\mathbb{Q}$上定義された代数群と埋めこみの列

$$\mathfrak{G} \xrightarrow{\ \Phi\ } \mathfrak{G}' \xrightarrow{\ \Phi'\ } Res_{k/\mathbb{Q}}Sp_{2n}$$

が得られる。更に，$\mathbb{Q}^{8n}$上の alternating bilinear form $\beta_{\mathbb{Q}} = Res_{k/\mathbb{Q}}\beta$ によって定義される$\mathbb{Q}$上の代数群 Sp_{4n} を考えれば，$Res_{k/\mathbb{Q}}Sp_{2n}$ は，自然に Sp_{4n} の部分群であり 埋めこみの列は，

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{G} & \xrightarrow{\ \Phi\ } & \mathfrak{G}' & \xrightarrow{\ \Phi'\ } & Sp_{4n} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\mathfrak{G}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{G}'(\mathbb{R}) & \longrightarrow & Sp_{4n}(\mathbb{R}) \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\mathfrak{G}(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \mathfrak{G}'(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & Sp_{4n}(\mathbb{Q})
\end{array}$$

と考えられる。ところで，$\mathbb{R}$上では，次の同型がなりたつ。

$$\mathfrak{G} \cong \mathbb{G} \times {}^{\sigma}\mathbb{G}, \qquad \mathfrak{G}' \cong \mathbb{G}' \times {}^{\sigma}\mathbb{G}',$$

$$\mathfrak{G}(\mathbb{R}) \cong G \times Sp(n), \qquad \mathfrak{G}'(\mathbb{R}) \cong G' \times SU(2n).$$

ここで、${}^{\sigma}\mathbb{G}$, ${}^{\sigma}\mathbb{G}'$は、それぞれ $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}'$ の σ による conjugation である。しかも、この同型の下で、$\Phi = \phi \times {}^{\sigma}\phi$ となっている。この同型による $\mathcal{G}(\mathbb{R})$, $\mathcal{G}'(\mathbb{R})$ の G, G' への projection を、それぞれ、$p : \mathcal{G}(\mathbb{R}) \longrightarrow G$, $p' ; \mathcal{G}(\mathbb{R}) \longrightarrow G'$ とする。

$\mathbb{Q}$ 上の代数群の arithmetic subgroup に関するよく知られた議論によって、$\mathcal{G}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{G}'(\mathbb{Q})$ の arithmetic subgroup は、それぞれ、$\mathcal{G}(\mathbb{R})$, $\mathcal{G}'(\mathbb{R})$ の cocompact 不連続部分群となり、それらを p, p' によって G, G' へ移すことにより、G, G' の cocompact 不連続部分群が得られる。Borel-Wallach の議論に従って、今、次のように $\mathcal{G}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{G}'(\mathbb{Q})$ の arithmetic subgroup をとる。Sp_{4n} を定義する $\beta_{\mathbb{Q}}$ が通常の形となるような $\mathbb{Q}^{8n}$ の基底をとり、この基底に関して Sp_{4n} を $GL(8n, \mathbb{C})$ の中に実現しておく。従って、$Sp_{4n}(\mathbb{R}) = Sp(4n, \mathbb{R})$ である。このとき、

$$\mathcal{G}(\mathbb{Z}) := \{ g \in \mathcal{G}(\mathbb{Q}) \mid \Phi' \circ \Phi(g) \in Sp(4n, \mathbb{Z}) \}$$

$$\mathcal{G}'(\mathbb{Z}) := \{ g \in \mathcal{G}'(\mathbb{Q}) \mid \Phi'(g) \in Sp(4n, \mathbb{Z}) \}$$

と定義し、$\Gamma_0 = p(\mathcal{G}(\mathbb{Z}))$, $\Gamma_0' = p'(\mathcal{G}'(\mathbb{Z}))$ とすれば、Γ_0, Γ_0' は G, G' の cocompact 不連続部分群である。$\mathcal{G}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{G}'(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Δ, Δ' に対し、Γ_0, Γ_0' の有限指数をもつ部分群 $\Gamma = p(\Delta)$, $\Gamma' = p'(\Delta')$ を、Γ_0, Γ_0' の合同部分群とよぶことにする。Borel-Wallach は、$Sp(4n, \mathbb{Z})$ の合同部分群に関する議論と、"theta distribution" を使った議論によって、次の結果を示した。

定理（Borel-Wallach, [1], VIII）各 $r \in \mathbb{Z}$ に対して．Γ_0' の合同部分群 Γ' で．$\mathrm{Hom}_{G'}(H_r, L^2(G'/\Gamma')) \neq \{0\}$ となるものがある．

そこで．我々の群 G に対しては．次のように Γ を構成すればよい。上の定理において．$\Gamma' = p'(\Delta')$（Δ' は $\mathfrak{G}'(\mathbb{Z})$ の合同部分群）とする。埋めこみ $\Phi : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}'$ は $\mathbb{Q}$ 上定義されているから．ある $\mathfrak{G}(\mathbb{Z})$ の合同部分群 Δ で $\Phi(\Delta) \subset \Delta'$ となるものが存在する。このとき．$\Gamma = P(\Delta)$ とすれば．Γ は G の cocompact 不連続部分群で．$\phi(\Gamma) \subset \Gamma'$ をみたしている。従って．補題より．命題4が導かれる。

—— 引用文献 ——

[1]. A. Borel, N. Wallach : Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups. Ann. Math. Studies, No 94, Princeton Univ. Press, 1980.

[2]. D. A. Vogan, Jr, G. J. Zuckerman : Unitary representations with non-zero cohomology, Comp. Math. 53 (1984), 51–90.